INFINITUL

Călătorie sau destin?

FRANCESC ROSSELL I PUJÓS

Traducere de Liviu Ornea

LITERA
București

CUPRINS

Capitolul 0

Infinitul există doar ca potențialitate. Sau nu?

Nicio altă întrebare nu a atins atât de profund spiritul uman; nicio altă idee nu i-a stimulat atât de rodnic intelectul; cu toate acestea, niciun alt concept nu are mai multă nevoie de clarificare decât infinitul.
David Hilbert, 1862–1943

În știință, în general, și, în matematică, în particular, unii savanți au norocul să prindă câte o zi mare. Sunt zile în care-și dau seama că au descoperit ceva nou sau că au reușit să demonstreze ceva ce, până atunci, era doar o ipoteză; sau e vorba, pur și simplu, despre ziua în care un lung proces de cercetare își atinge punctul culminant. Acestea sunt zilele mari care marchează progresele științei.

Dar în istoria matematicii au fost și zile în care părea că nimic nu are sens, când cercetările ajungeau într-un punct mort, iar cercetătorii, copleșiți de întrebări, simțeau nevoia să se oprească. Chiar dacă nu acestea sunt zilele acelea *mari*, adesea tocmai atunci a fost aruncată sămânța vreunei noi direcții de cercetare și s-a pornit ceva important. Și zilele care nu-s *mari* contribuie la progresul matematicii.

§

Azi e o zi mare pentru **Anaximandru** (610 î.Hr.–545 î.Hr.), un tânăr elev pasionat din Milet. Profesorul său, filosoful **Thales**

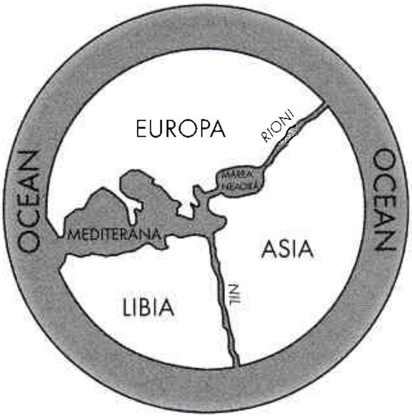
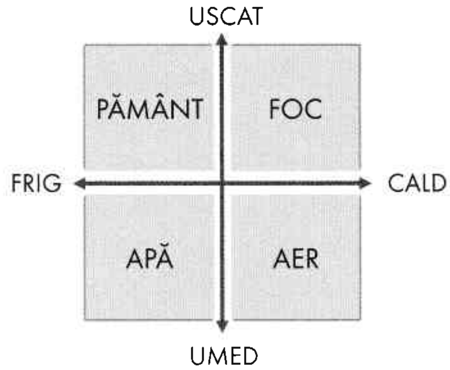


Figura 1. Vedere de sus a lumii, potrivit lui Anaximandru.

(623 î.Hr.–546 î.Hr.), tocmai l-a lăudat pentru explicația pe care a dat-o lumii înconjurătoare. Teza lui Anaximandru contrazice tot ce s-a spus și scris până atunci; într-adevăr, el susține că lumea nu e susținută de elefanți, nu se sprijină pe piloni sau altceva de acest fel. Pământul, după Anaximandru, e un disc cu o grosime destul de redusă care plutește prin spațiu. Aerul îl înfășoară de dedesubt, de deasupra, de peste tot din jurul lui.

Anaximandru nu era sigur că maestrul îi va aprecia ideile. Chiar dacă această nouă teorie permitea o explicație mai simplă pentru faptul că Soarele și celelalte stele *dispar*, pentru ca apoi să *reapară* din nou după câteva ore (se rotesc în jurul Pământului având mișcări circulare, de asta nu le vedem când sunt dedesubtul lui), în toate cărțile pe care le citise, unele provenind chiar din locuri îndepărtate, ca Egiptul, Pământul era întotdeauna descris ca *sprijinindu-se* pe ceva. Anaximandru începuse să se îndoiască de ipoteza asta și a căutat o alta cu care să explice mișcările Soarelui și de ce acesta este vizibil ziua și invizibil noaptea. Elogiile maestrului său l-au răsplătit din plin și, în același timp, l-au făcut să pună în discuție tot ce luau de sigur contemporanii lui. Dar una e să pui în discuție teorii formulate sute

Figura 2. Cele patru elemente constitutive ale materiei și proprietățile lor.



ani înainte și cu totul altceva e să pui în discuție, la modul cel mai direct, învățătura maestrului tău. Cine ar îndrăzni să se îndoiască de teoriile marelui Thales?

Anaximandru, poate.

În cercetările sale îndreptate către cunoașterea esenței lucrurilor, deci în tentativa de a afla care e materia primă din care e constituit tot ce ne înconjoară (*arché* sau, în greacă, *ἀρχή*), Thales presupusese că ar fi vorba despre apă. Totul ar fi constituit din apă, spiritul viu și inteligent care, în definitiv, conduce nașterea, transformarea și moartea oricărui lucru: oameni, animale, plante... toți avem nevoie de apă pentru a ne naște și a crește, în lipsa apei domnește doar moartea.

Anaximandru are o obiecție importantă la explicația lui Thales: din moment ce e limpede pentru toți că lumea e constituită din patru elemente – aer, apă, foc și pământ –, nu e posibil ca unul singur dintre ele – apa – să dea naștere celorlalte trei; e suficient să ne gândim că apa e un element umed și rece, în timp ce focul e cald, ca și aerul, iar pământul e uscat.

Cu siguranță, Thales se înșală. *Arché* nu e apă și, de altfel, nu poate fi niciunul dintre cele patru elemente din care e formată materia.

Ceea ce explică și constituie totul nu poate fi o submulțime a totului. În particular, *arché* nu poate fi ceva definit și finit, din moment ce constituie materia esențială a tot ce a fost și va fi pe lumea aceasta și în cea de dincolo. E obligatoriu ca *arché* să fie infinit, sau, cum se zice în greacă *ápeiron*, de la α΄, „non", și πεῖραρ, „sfârșit"). Niciunul dintre cele patru elemente nu poate fi *arché* pentru că, până la urmă, e vorba despre niște substanțe limitate, finite, pe când *arché* trebuie să fie infinit, doar e sursa a tot ce a fost creat și a tot ce va fi creat.

În orice caz, după Anaximandru, există oricum o relație între cele patru elemente și *ápeiron*: acesta din urmă e combinația celor patru care se amestecă pentru a forma o substanță indefinită și nouă aflată veșnic în mișcare. Și tocmai datorită mișcării se dizolvă *ápeiron* în substanțe simple, adică în cele patru elemente, reglând astfel ciclurile creației, transformare și distrugere, pentru că tot ce moare se preface în *ápeiron*.

Ápeiron e infinit. Sau, mai bine, e infinitul. El există în realitate și controlează procesele naturale, chiar dacă noi nu suntem în stare să-l vedem. E ca un zeu. De altfel, și zeii, care sunt tot substanțe, sunt constituiți din *ápeiron*. Care e deci un fel de zeu al zeilor, o ființă mai puternică decât însuși Zeus. Toți facem parte din *ápeiron*, din infinit, el e în noi și noi suntem în el.

Cu cât se gândește mai mult, cu atât se convinge Anaximandru de două lucruri: primul e că ziua de azi e o zi mare pentru că a fost lăudat de maestru, marele Thales din Milet; al doilea e că nu-i va expune chiar azi viziunea sa despre *arché*. N-o să riște să strice ziua asta măreață. Mai bine mâine.

§

Azi e o zi mare pentru **Aristotel** (384 î.Hr.– 322 î.Hr.): revine la Atena după șase ani în care a fost preceptorul lui Alexandru cel Mare, fiul regelui Filip al II-lea al Macedoniei. Cu șase ani înainte, Aristotel,

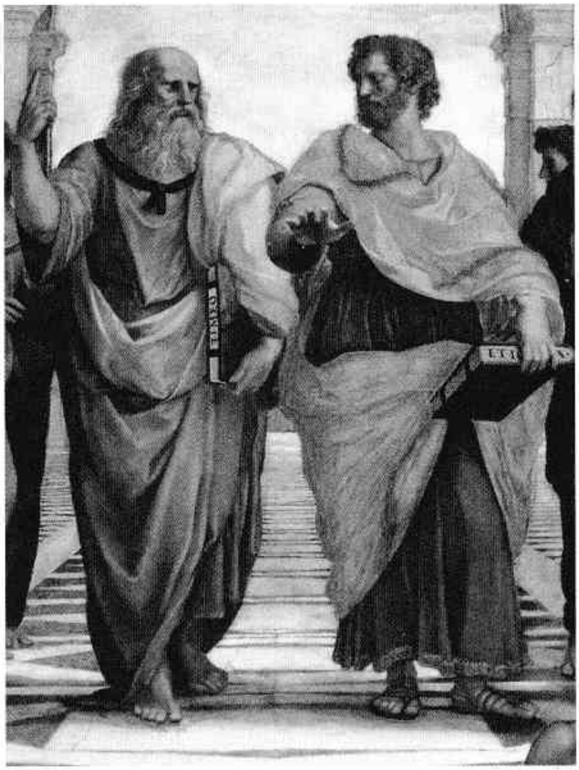


Figura 3. Aristotel și Platon la Academie, într-un tablou de Rafael, 1509. Aristotel arată spre podea, deci spre lumea materială, în timp ce Platon are degetul îndreptat în sus, semnificând lumea ideilor.

în vârstă de 41 de ani pe-atunci, acceptase sarcina de a-l educa pe Alexandru, un tânăr hărăzit să conducă un mare imperiu, pentru că văzuse în el ultima șansă pentru instituirea unui mare centru al cunoașterii, unde să continue studiul și de unde cunoștințele să se răspândească în toate colțurile lumii.

Din postura de preceptor al lui Alexandru, Aristotel a putut crea o imensă bibliotecă ce cuprindea cunoștințele acumulate în vremea lui, dar îndatoririle de educator i-au răpit mult din timpul pe care l-ar fi consacrat meditației. Acum, la 47 de ani împliniți, sosise timpul să se întoarcă la Atena, la șase ani după ce pornise în ocolul macedonean și la zece ani după ce abandonase Academia lui Platon.

Deasupra porții de intrare în Academie era scris „Interzis celor care nu știu geometrie" și, efectiv, marii maeștri ai acestei materii chiar trecuseră pe acolo. Între ei, se număra **Eudoxus din Cnidos** (390 î.Hr.–337 î.Hr.), un discipol care-l fascinase cu metodele lui pe mai tânărul pe-atunci Aristotel. Eudoxus vorbea despre mărimi fracționabile, adică despre cantități foarte mici, atât de mici pe cât ne-ar plăcea să fie, care puteau fi folosite pentru a măsura mărimi mai mari.

Raționamentele originale ale lui Eudoxus, al cărui punct de vedere era diferit de toate cele exprimate până la el, au stârnit dezbateri încinse în Academie: numerele sunt atât de apropiate unele de altele, încât par literalmente lipite. Altfel spus, între două numere, oricât de apropiate ar fi ele, se poate întotdeauna găsi un alt număr. Aristotel credea că Eudoxus se înșală: *cum am putea trece de la un număr la următorul dacă n-ar exista nicio distanță care să le separe?* În plus, Aristotel cunoștea la perfecție scrierile lui **Zenon din Elea** (490 î.Hr.–430 î.Hr.), ca aceea în care filosoful formulează paradoxul săgeții, care spune că o săgeată slobozită din arc nu va ajunge niciodată ținta: dacă numerele chiar ar fi *lipite* unul de celălalt, adică, dacă în segmentele pe care le trasăm ar exista un număr pentru fiecare punct al dreptei, atunci săgeata, ca să ajungă la țintă, ar trebui să parcurgă întâi jumătate din distanță. Dar, ca să ajungă la mijlocul drumului, ar trebui să ajungă întâi în punctul care se află la jumătatea drumului dintre arc și prima jumătate. De fapt, înainte de a ajunge acolo, săgeata ar trebui să parcurgă distanța care separă arcul de a doua jumătate. Dacă acest proces nu s-ar sfârși (dacă ar fi *infinit*, deci), e evident că săgeata n-ar putea ajunge niciodată la țintă pentru că, în realitate, nici măcar n-ar putea părăsi arcul. Rezultă că într-o lume cu numerele *lipite*, mișcarea nu există. Dar ținând seamă că, una peste alta, săgețile continuă să plece din arcuri (cel puțin atunci când arcașii sunt pricepuți) și să-și atingă țintele cu mai multă sau mai puțină precizie, pare evident că, de fapt, nu există această cantitate infinită de numere. Desigur, am putea să împărțim măcar *potențial* un segment în două jumătăți și astfel, tot în teorie, ne-am putea număra pașii sau firele de nisip într-un proces interminabil. Dar în realitatea noastră finită din universul nostru finit, acest lucru nu e posibil.

În timp ce se pregătește pentru plimbarea de dimineață, Aristotel se gândește la infinit. „Mare geniu, Zenon!" Stagiritul își spune că de îndată ce va începe să scrie, se va ocupa de argumentele lui Zenon și de modul strălucit în care le demonstrează: reducere la absurd. Va fi, cu siguranță, una dintre primele chestiuni pe care le va discuta Aristotel când se va pune pe scris: se va ocupa de Zenon, de paradoxurile lui și de Eudoxus. Nu-i plac raționamentele lui, dar tot trebuie să recunoască ingeniozitatea metodei lui de calcul al ariilor și volumelor. Aristotel e nevoit să admită că metoda lui Eudoxus, înțeleasă ca mecanism, permite cumva vizualizarea procedeului care constă în folosirea unor părți din ce în ce mai mici pentru a măsura anumite cantități care, altfel, ar fi foarte greu de calculat.

Eudoxus umplea fiecare suprafață cu dreptunghiuri foarte înguste (dar cu suprafața cunoscută), în așa fel încât să nu lase aproape niciun spațiu liber, iar apoi doar aduna dreptunghiurile acelea. Eudoxus era convins că dacă s-ar fi ales dreptunghiuri din ce în ce mai înguste într-un proces fără sfârșit (adică, dacă s-ar fi ales dreptunghiuri **infinitezimale**), metoda lui ar fi dus la calculul exact al suprafeței respectivei figuri.

Dar, evident, e vorba despre universul posibilităților, de ceea ce e potențial, nu de realitate. Potrivit lui Aristotel, ce nu se poate experimenta e ininteligibil. Poate că, așa cum susținea maestrul său, **Platon** (cca 427 î.Hr.–347 î.Hr.), e adevărat că realitatea se află dincolo de ceea ce percepem și că în lumea noastră, cea pe care o numim reală, există numai percepții. Poate că în lumea platonică a realităților autentice, în lumea ideilor, infinitul există; dar aici, în lumea reală, există numai ceea ce putem percepe: finitudinea.

REDUCEREA LA ABSURD

Reducerea la absurd e un tip de argumentație logică, popularizat de Zenon, în care se presupune că ceea ce vrem să demonstrăm ar fi fals, ajungând astfel la o concluzie absurdă. În realitate, e o tehnică foarte răspândită de raționament care ușurează de multe ori înțelegerea demonstrațiilor.

De exemplu, ca să demonstrăm că există o infinitate de **numere prime** (un număr e considerat prim dacă e divizibil doar cu unu și cu el însuși, cum sunt 2, 13, dar nu 6), Euclid a folosit tehnica reducerii la absurd:

- Să presupunem că afirmația „există o infinitate de numere prime" ar fi falsă, existând atunci doar n numere prime. Să le notăm $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Presupunem că nu mai există alte numere prime în afara acestora.
- Acum calculăm numărul $p = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n + 1$.
- Observăm că p nu e divizibil prin niciun număr prim (deoarece rezultatul împărțirii prin oricare dintre numerele prime ar da restul 1, adică împărțirea nu ar fi exactă).
- Rezultă că p e număr prim, ceea ce e **absurd**, pentru că am început spunând că singurele numere prime sunt $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
- Din moment ce am ajuns la o concluzie absurdă, ipoteza noastră de plecare trebuie să fi fost falsă. Asta înseamnă că numerele prime sunt infinite sau, parafrazându-l pe Euclid, „cantitatea de numere prime e mai mare decât orice cantitate de numere prime pe care ne-am putea-o imagina".

Adevărul e că metoda lui Eudoxus e destul de bună, chiar dacă se obțin valori sistematic mai mici decât cele reale, pentru că întotdeauna rămân mici suprafețe nemăsurate. În orice caz, cu metoda asta, Eudoxus a putut demonstra că ariile a două cercuri stau una față de cealaltă ca pătratele razelor lor, o observație care lui Aristotel i se pare foarte frumoasă din punct de vedere geometric.

De altfel, Aristotel își amintește că cineva i-a vorbit și de un alt sistem inventat de Eudoxus, de data asta pentru calculul volumelor, folosind prisme dreptunghiulare, cu care a reușit să demonstreze că raportul volumelor a două sfere este egal cu raportul dintre cubul razelor acestora. Încă o dată, asta e frumusețea geometriei.

În orice caz, ținând seama de cât de puțin timp are Aristotel la dispoziție, ar fi mai bine să-l abandoneze pe Eudoxus și să se concentreze pe alte chestiuni mai reale și mai puțin potențiale. La urma urmei, se gândește Aristotel, cu toate progresele lui Eudoxus cu conceptul de infinit și cu toate minunatele rezultate geometrice la care a ajuns, rațiunea empirică (iar alta nu poate exista, oricât ar vorbi maestrul Platon despre lumea ideală) ne demonstrează că trăim într-un univers finit și că dincolo de finitudine nu mai e nimic altceva. Poate că nu merită să-și consacre puținul timp ca să vorbească despre infinit, poate că e mai bine să scrie despre probleme mai importante ca, de exemplu, conceptul de schimbare, înțeles ca trecere de la ceea ce există în mod potențial la ceea ce se întâmplă cu adevărat. Un copil, de exemplu, e un adult potențial chiar dacă, *în act,* e doar un copil și, din acest motiv, acționează ca atare. Schimbările prin care va trece vor face din el un adult, dar, între timp, adult va fi numai potențial.

La fel, își spune Aristotel, orice număr, orice mărime, e un infinit potențial, pentru că ar putea să se transforme într-un *număr din ce în ce mai mare* adunându-i alte unități, dar asta nu înseamnă că infinitul e real, pentru că nu se poate ajunge la el niciodată: se poate doar continua adunarea câte unei unități, la nesfârșit.

Până la urmă, poate că *Aristotel va sfârși prin a scrie despre infinitul potențial și despre infinitul real* (asta doar ca să-l numească cumva,